教養教育センター　マンスリーコラム　vol. 28
2024 / 06 / 13

判別のための論理

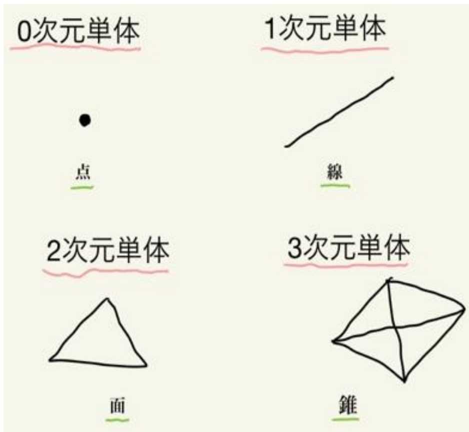
（数学）

　この前の休日、家からつっかけサンダルのまま外に出て、近所の公園を散歩していた。近くの商業施設の映画館やレストランは休日だと混雑する。動画やテレビ視聴やお出かけには現実の生活での実用性をあまり求めないのに、近年は学問、特に数学においては社会で有用な側面を前面に出していた気がするがどうだろう。しかし実用的かどうかは一旦置いておいて、そもそも数学が楽しいと感じる時はどんな時なのか。高校で習った知識で難しい問題が解けたら楽しいかもしれない。場合分けなどして、丁寧な解答が作成出来たら楽しいかもしれない。数学は科学の言語なのだから。そんな気持ちで教養ゼミでは学生にいくつかの入試問題の解説をしてもらった。後期には微分方程式、または複素関数論やフーリエ解析の本を読むつもりだ。

　現象の解析に数学を用いるのは面白いかもしれない。自然な現象に対して、無意識で何を判別してどう鑑別しているのか。そう思うとまず気になるのは、人はどのように近く遠くを識別するのか、物のあるなしを識別するのかである。こちらと向こうの間に境界があるとき、別物だと認識する気がする。

　小さい子の絵を見てみると、頭、胴体を表していると思しき立体が２つと、手足と思われる線が引かれていたりする。３次元空間内における物体を基本的な立体と２次元曲線で表しているようだ。しかし我々が今見ているのは３次元だが、この世界にはｎ次元を考えた方がいい時もある。３次元における見え方は全く同じだが、４次元以降は異なる構造を持つ場合も多々ある。

　我々はｎ次元における「スタンダードな形」を１つ決め、それをもとにしてｎ次元でも図形を考えたい。その「スタンダードな形」はｎ次元単体と呼ばれている。ｎ次元単体の見た目をあえて考えるならば、凸多面体の見た目をしている。１次元単体は線で２次元単体は面の見た目である。ｎ次元単体を貼り合わせて幾何学的な図形を代数的・組み合わせ論的に表すことも出来る。それは幾何的実現と呼ばれる方法で、位相空間と見なすことができる。



　一般の図形をｎ次元単体で記述できたとき、ホモロジーなどの不変量も考えることが出来る。図形に付随する不変量は、画像処理なども含めたトポロジカルデータ解析に用いられる。

　いつの間にか実用的な側面を説明していたが、単体的集合という数学的構造を用いれば、ｎ次元ではなく、「ｎ個の付随する関係性」も、数学で記述できる。私の研究の道具である、高次元のものの関係性を記述する無限圏もその１つである。３次元にいる者たちの煩悩をｎ次元が記述すると思うと面白い。